微分体の整数論 (整数論)

AUTHOR(S):

高橋, 秀一; 国吉, 秀夫

数理解析研究所講究録
378巻 1980年 112-122

微分体の整数論

モントリオール大　高橋秀一

宮城教育大　国吉秀夫

K：(常)微分体　すなわち，線形写像

$$\partial : K \to K, \quad \partial(ab) = \partial a \cdot b + a \cdot \partial b$$

をもつ(可換)体，標数0とする。（記号：$\partial a = a'$）

K_c：$= \{ a \in K \mid \partial a = 0 \}$　その定数体

（以下，K_c は閉体と仮定する。）

このとき universal な微分体 $\widetilde{K}$ とその定数体 $\widetilde{K}_c$ が存在して，拡大は $\widetilde{K}$ の中で考える。

（記号：$K\langle\eta\rangle$ 微分体として $\eta \in \widetilde{K}$ を K に添加したもの）

Kolchin の方法

G：連結代数群で K_c 上定義されたもの

$\mathcal{L}(G)$：その Lie 代数

V：G上の principal homogeneous K-space（$V_{\widetilde{K}} \neq \phi$，$\widetilde{K}$ 代数閉体）

とすれば，$\mathcal{V}$ に対しても Lie 代数 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ が K 上定義され，

$\eta \in \mathcal{V}$ に対して $\lambda_\eta : G \to \mathcal{V}$, $x \longmapsto \eta x$ とすれば

$$\lambda_{\eta *} : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$$

さらに，対数微分

$$l\partial : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}), \qquad l\partial(\eta) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})_{K\langle\eta\rangle}$$

が i) $l\partial(\eta x) = l\partial(\eta) + \lambda_{\eta *}(l\partial x)$, $x \in G$, $\eta \in \mathcal{V}$

ii) K 上の同形写像 $\sigma : K\langle\eta\rangle \longrightarrow \widetilde{K}$ に対し

$$l\partial(\sigma\eta) = \sigma l\partial(\eta)$$

iii) $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{V}$ に対し

$$l\partial(\eta_1) = l\partial(\eta_2) \Leftrightarrow x = \eta_1^{-1}\eta_2 \in G_{\widetilde{K}_c}$$

（これは $\eta_1 x = \eta_2$ となる $x \in G$）

となるように定義できる。

<u>例</u> $\mathcal{V} = G \subset GL(n)$ のとき

$$l\partial(\eta) = \eta' \eta^{-1} = a \in \mathcal{L}(G)_K$$

となる η をとれば，K 上の iso. σ に対し

$$\eta^{-1}\sigma\eta = c(\sigma) \in G_{\widetilde{K}_c}$$

<u>Galois 拡大</u>（strongly normal）L/K :

L/K finitely generated で，

任意の K 上の iso. $\sigma : L \longrightarrow \sigma L < \widetilde{K}$ に対し

$$\sigma L < L\cdot\widetilde{K}_c, \qquad L < \sigma L\cdot\widetilde{K}_c$$

となるものとする。

そのとき，σ は $L\widetilde{K}_c/K\widetilde{K}_c$ の automorphism に一意に延長され，σ 全体の集合は $L\widetilde{K}_c/K\widetilde{K}_c$ の automorphism group と同一視できる。これを L/K の Galois 群といい，$Gal(L/K)$ と記す。

例 1)　$L=K\langle\eta\rangle$　η は $y'=a(\in K)$ の解，$\eta\notin K$

このとき，$Gal(L/K)\simeq \mathbb{G}_a$

2)　$L=K\langle\eta\rangle$　η は $y'=ay$　$(a\in K)$ の解.

η　K 上超越，$L_c=K_c$

このとき，$Gal(L/K)\simeq \mathbb{G}_m$

3)　Picard-Vessiot 拡大　$L=K\langle\eta_1,\cdots,\eta_n\rangle$

$\eta_1,\cdots,\eta_n$ は $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$，$a_i\in K$ の基本解で，$L_c=K_c$

このとき，$\sigma\in Gal(L/K)$ に対し

$$\sigma(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)C(\sigma),\quad C(\sigma)\in GL(n,\widetilde{K}_c)$$

となり，$Gal(L/K)\subset GL(n,\widetilde{K}_c)$

定理

a) V を G 上の principal homogeneous K-space，

$\eta\in V$ を K 上 generic で

$$l\partial\eta\in\mathcal{L}(V)_K$$

とする。もし，$L=K\langle\eta\rangle=K(V)$ の定数体 L_c が K_c と一致する（$L_c=K_c$）ならば

$K\langle\eta\rangle/K$ は galois 拡大で

$$\mathrm{Gal}(K\langle\eta\rangle/K) \rightrightarrows G_{\tilde{K}_c} \quad (K_c \text{ 同形})$$

$$\sigma \longmapsto c(\sigma) = \eta^{-1}\cdot\sigma\eta$$

b) 逆に L/K を galois 拡大で, K_c 同形

$$c : \mathrm{Gal}(L/K) \rightrightarrows G_{\tilde{K}_c}$$

が存在するとき,

G 上のある principal homogeneous K-space V と

K 上 generic な点 $\eta \in V_L$ で

$$l\partial(\eta) \in \mathcal{L}(V)_K$$

となるものが存在して

$$L = K\langle\eta\rangle = K(V)$$

かつ, すべての $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対して

$$\sigma\eta = \eta\, c(\sigma)$$

が成立する。

([2] Ch VI, §10, Th 9 ; a) については, このとき

trans. deg $K\langle\eta\rangle/K = \dim G$)

註) galois cohomology set $H^1(K,G)$ は G 上の principal homogeneous K-space の K-同形類の集合と1対1に対応する ([2] Ch V, §13) から, $H^1(K,G)=1$ ならば $V \simeq G$ で, 上の定理は G のみ考えればよい。

$G = \mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, GL(n), SL(n)$ のときは $H^1(K,G)=1$ である。

Galois 理論 (Kolchin - Lang [3])

以上の線に沿えば, galois 拡大 L/K に関する Galois の基本定理は次の形になる。

$$\begin{array}{ccccc}
L = K(V) & \longleftrightarrow & V & \longleftrightarrow & 1 \\
| & & | & & | \\
B = K(V/H) & \longleftrightarrow & V/H & \longleftrightarrow & H \\
| & & | & & | \\
K = K\langle 1 \rangle & \longleftrightarrow & 1 = V/G & \longleftrightarrow & G = Gal(L/K)
\end{array}$$

Ritt の方法

$U \supset V$ を複素球面 $\mathbb{C}$ 上の connected open set, $\mathfrak{M}$ を有理形関数の層とする。そのとき, U, V 上の有理形関数全体の集合をそれぞれ $K = \Gamma(U, \mathfrak{M})$, $L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$ とすれば

$$\mathrm{Res} : K = \Gamma(U, \mathfrak{M}) \hookrightarrow L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$$

により, L は K の微分拡大となる。(K, L において, $\partial = \frac{d}{dz}$)

例 $U = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ とすれば

$$\log z \notin K = \Gamma(U, \mathfrak{M}) , \quad \log z \in L = \Gamma(V, \mathfrak{M})$$

で $\log z$ は $y' = \frac{1}{z}$ の解である。

Kummer 理論

K を微分体, $\tilde{K}$, K_c, $\tilde{K}_c$ は上述の通りとする。(K_c 標数 0, 代数閉体)

L/K を galois 拡大で, $Gal(L/K)$ が連結線形可換とする。
そのとき, 構造定理より, injective K_c-hom

$$Gal(L/K) \hookrightarrow (\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a)^N$$

が存在する。

$$G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$$

とおけば, $H^1(K, G) = \{1\}$. よって, G 上の principal homogeneous K-space は G と K-同形. また, このとき,

$$\mathcal{L}(G)_{\tilde{K}} = \tilde{K} \oplus \tilde{K}$$

ここで, $l\partial : G_{\tilde{K}} \to \mathcal{L}(G)_{\tilde{K}}$ は

$$l\partial(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1' \alpha_1^{-1}, \alpha_2')$$

により定義され, $\alpha, \beta \in G$ に対し

$$l\partial(\alpha\beta) = l\partial(\alpha) + l\partial(\beta)$$

さて,

$$\begin{aligned} A(L/K) &= \{ a \in \mathcal{L}(G)_K \mid \exists \alpha \in G_L,\ l\partial\alpha = a \} \\ &= l\partial(G_L) \cap \mathcal{L}(G)_K \end{aligned}$$

とおくと, $\mathcal{L}(G)_K$ の部分加群の列

$$\mathcal{L}(G)_K \supset A(L/K) \supset l\partial(G_K)$$

をうる。ここで商(加)群

$$A(L/K)/l\partial(G_K) = \underline{A(L/K)}$$

を考える。以下, $a \in A(L/K)$ の代表する coset を $\underline{a}$ で表す。

$\underline{a} \in \underline{A(L/K)}$ と $\sigma \in Gal(L/K)$ に対し, $\alpha \in G_L$, $\wp\alpha = a$ をとり

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = \alpha^{-1} \cdot \sigma(\alpha) \in G_{\tilde{K}_c}$$

とすると, $\langle \underline{a}, \sigma \rangle$ は α のとり方によらない。そして,

$$\langle \underline{a} + \underline{b}, \sigma \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{b}, \sigma \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma\tau \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{a}, \tau \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \sigma \in Gal \iff \underline{a} = \underline{0}$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \underline{a} \in \underline{A} \iff \sigma = 1$$

よって,

$$\begin{array}{ccccc} \underline{A(L/K)} & \times & Gal(L/K) & \longrightarrow & G_{\tilde{K}_c} \\ \underline{a} & \times & \sigma & \longmapsto & \langle \underline{a}, \sigma \rangle \end{array}$$

は perfect pairing となる。

<u>定理</u>

a)
$$\begin{array}{ccc} \underline{A(L/K)} & \longrightarrow & Hom_{K_c}(Gal(L/K), G_{\tilde{K}_c}) \\ \underline{a} & \longmapsto & \langle \underline{a}, \ \rangle \end{array}$$

は iso. である。

(ここで, 右側の群は $Gal(L/K)$ の character 群と考えられる。)

b) H を $Gal(L/K)$ の K_c 部分群とすれば

$$H^{\perp\perp} = H, \quad L_H = K_{H^\perp}$$

ここで, $\perp$ は上の pairing による直交集合を表し,

L_H は Galois 理論による H の不変体

$K_{H^\perp} = K\langle \alpha \mid \in L,\ \ell\partial\alpha = a,\ \underline{a} \in H^\perp \rangle$ を表す。

[証明]

1) $\langle \underline{a}, \ \rangle : Gal(L/K) \longrightarrow G_{\tilde{K}_c}$ は K_c-hom. である。
([2], Ch VI, Th 6 の証明と同様にして証明できる。)

2) $\underline{a} \longmapsto \langle \underline{a}, \ \rangle : \underline{A(L/K)} \longrightarrow Hom_{K_c}(Gal(L/K), G_{\tilde{K}_c})$
は全射である。

$f : Gal(L/K) \longrightarrow G_{\tilde{K}_c}$ を K_c-hom. とする。$G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$,
$Gal(L/K) \simeq \mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_a^s$ だから, f は Gal. の直積因子 H_i
$(\simeq \mathbb{G}_m, \mathbb{G}_a)$ から $\mathbb{G}_m$ 又は $\mathbb{G}_a$ への K_c-hom f_i の積に分解される。よって, 各 f_i が $\underline{A(L/K)}$ の像に入ることを示す。

$H_i \simeq \mathbb{G}_m$ のとき, $Hom_{K_c}(H_i, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}$ だから, f_i が
K_c 同形のときに示せばよい。

$H_i \simeq \mathbb{G}_a$ のとき, $f_i \neq 0$ ならば, f_i は K_c 同形

H_i の ($Gal(L/K)$ における) 直積余因子に対応する L/K
の中間体を L_i とすれば, $Gal(L_i/K) \simeq H_i$ そして,

$$f_i : Gal(L_i/K) \longrightarrow (\mathbb{G}_m \text{ 又は } \mathbb{G}_a \subset) G$$

は injective K_c-hom.

$H^1(K, G) = 1$ であるから, [2] Ch VI, §9, Cor 1 より,
$\exists \alpha \in G_{L_i}$; $\ell\partial\alpha = a \in \mathcal{L}(G)_K$, $\sigma\alpha = \alpha f(\sigma)$ $(\sigma \in Gal(L_i/K))$
$\therefore$ $f_i\langle \ \rangle = \langle \underline{a}, \ \rangle$

3) H を $Gal(L/K)$ の K_c 部分群とする。 $H^{\perp\perp} \supset H$ は定義より明。

$\sigma \in Gal(L/K) - H$ をとり, f を K_c hom : $Gal(L/K) \longrightarrow G$ で, $\mathrm{Ker} f \supset H$, $f(\sigma) \neq 1$ となるものとすれば, 2) より, $f(\ ) = \langle \underline{a}, \ \rangle$ となる $\underline{a} \in \underline{A}$ が存在. そのとき, $\underline{a} \in H^{\perp}$ ∵ $\sigma \notin H^{\perp\perp}$ ∴ $H^{\perp\perp} = H$.

$L_H = K_{H^{\perp}}$ はこれから直ちに出る。 ▨

<u>註</u> 1) 定理を図示すれば

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \underline{A(L/K)} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & 1 \arrow[d, dash] \\
L_H \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \underline{B} = H^{\perp} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & H \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, leftrightarrow] & \underline{0} \arrow[r, leftrightarrow] & Gal
\end{tikzcd}$$

<u>註</u> 2) $\underline{A}$ の $\underline{0}$ の近傍として

$$U(E,F) = \{ \underline{a} \in \underline{A} \mid \langle \underline{a}, \sigma \rangle \notin F, \ \sigma \in E \}$$

E は $Gal(L/K)$ の有限集合, F は $G_{\widetilde{K_c}}$ の有限集合で 1 を含まぬものとする。

E, F をこの条件をみたすもの全体を動かして, $U(E,F)$ により $\underline{A}$ に位相を入れる。 b) において, K_c 部分群 H に対応する $\underline{B} = H^{\perp}$ は, この位相による $\underline{A}$ の閉部分群として characterize される。

注3) $y' = ay$, $a \in K$, の形の解 (exponential) のみの拡大体については Rosenlicht [5].

附録 定数体について。

1) $L = K\langle y\rangle$, $y' = a \in K$ のとき $L_c = K_c$ ([1] p23)

2) $L = K\langle y\rangle$, $y' = ay$, $a \in K$ のとき,

$$A(L/K) = \{a \mid \in K,\ \exists \alpha \in L,\ \alpha'\alpha^{-1} = a\}$$

とおき, $A(L/K)/\ell\partial((\mathbb{G}_m)_K)$ に torsion part がなければ, $L_c = K_c$ が 1) と同様にして証明できる。

torsion part があれば, $L_c = K_c$ は必しも成立しない。

例 $K = K_c(X)$, K_c 閉体, $\partial = \frac{d}{dX}$ とする。このとき, $L = K\langle y\rangle$, $y' = \frac{1}{2X}y$ の形で $L_c \supsetneqq K_c$ となるものが作れる。実際,

$c \in \widetilde{K_c} - K_c$ をとり $y = \sqrt{cX}$ とおけば

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2X}$ 一方 $c = \frac{y^2}{X} \in K\langle y\rangle$, 定数

参考文献

[1] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957

[2] E. Kolchin, *Differential algebra and algebraic*

groups, Academic Press, New York, 1973

[3] E. Kolchin – S. Lang, Algebraic groups and the Galois theory of differential fields, Amer. J. Math. 80 (1958), 103–110

[4] J. F. Ritt, Differential algebra, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol 33, New York, 1950

[5] M. Rosenlicht, Differential extension fields of exponential type, Pacific J. Math. 57 (1975) 289–300